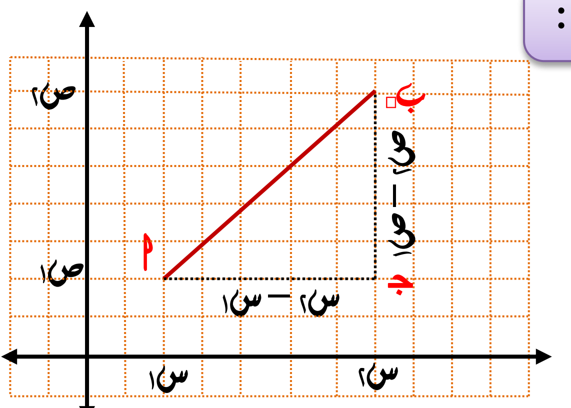
البعد بين نقطتين

المفهوم :



فى الشكل المقابل

Δ أ ب جـ قائم فى جـ :-

وبتطبيق نظرية فيثاغورث على الـ Δ أ ب جـ

(أ ب)^{٢} = (ب جـ)^{٢} + (أ جـ)^{٢}

ولكن ب جـ = ص$_{٢}$ – ص$_{١}$ ، أ جـ = س$_{٢}$ – س$_{١}$

أ ب = $\sqrt{(ص_{٢} - ص_{١})^{٢} + (س_{٢} - س_{١})^{٢}}$

أ ب = $\sqrt{\text{مربع فرق الصادات + مربع فرق السينات}}$

حالات خاصة

(١) البعد بين أى نقطتين على خط أفقى مثل

النقط (ل ، م) ، (هـ ، م) هو= | ل – هـ |

مثال البعد بين النقطتين أ(٣ ، ٤) ، ب(٧ ، ٤)

أ ب = | ٣ – ٧ | = | -٤ | = ٤

(٢) البعد بين أى نقطتين على خط رأسى مثل

النقط (ل ، م) ، (ل ، و) هو= | م – و |

مثال البعد بين النقطتين أ(٣ ،١) ، ب (٣ ،-٧)

أ ب = | ١ – (-٧) | = | ١ + ٧ | = ٨

(٣) البعد بين أى نقط (ل ، م) ونقطة الأصل و = (٠ ، ٠) هو $\sqrt{ل^{٢} + م^{٢}}$

مثال البعد بين النقطتين أ(٣ ، ٤) ، و (٠ ، ٠)

أ و = $\sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢}}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

(٤) البعد بين نقطة الأصل وأى نقطة على المحورين مثل :

أ(٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ل) يكون البعد أ ب= | ل |

أ(٠ ، ٠) ، ب (م ، ٠) يكون البعد أ ب = | م |

مثال

البعد بين أ (٥ ، ٠) و ب(٠ ، ٠) = | ٥ | = ٥

البعد بين أ(٠ ، ٠) و ب (٠ ، -٦) = | -٦ | = ٦

مثال١

إذا كانت أ = (١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ٦) أوجد البعد بين أ ، ب

الحل

أ ب = $\sqrt{(ص_{٢} - ص_{١})^{٢} + (س_{٢} - س_{١})^{٢}}$

أ ب = $\sqrt{(٤ - ١)^{٢} + (٦ - ٢)^{٢}}$ = $\sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢}}$

= $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات

مثال٢

إذا كانت أ=(-١ ، ٢) ، ب =(٤ ، ٦) أوجد البعد بين أ ، ب

الحل

أ ب = $\sqrt{(٤ + ١)^{٢} + (٦ - ٢)^{٢}}$ = $\sqrt{(٥)^{٢} + (٤)^{٢}}$

= $\sqrt{٢٥ + ١٦}$ = $\sqrt{٤١}$ وحدات

تدريب

(١) إذا كانت أ = (-٢ ، ٢) ، ب = (٤ ، -٦)
أوجد البعد بين أ ، ب

....

(٢) إذا كانت أ = (٣ ، ٧) ، ب = (٣ ، -٥)
أوجد البعد بين أ ، ب

....

(٣) أ = (٤ ، ٢) ، ب = (١١ ، ٢)

....

(٤) أ = (٥ ، ١٢) ، ب = (٠ ، ٠)

....

(٥) ل = (٧ ، ٠) ، م = (٠ ، ٠)

....

ملاحظات هامة :

(١) لإثبات أن النقاط أ ، ب ، جـ على إستقامة واحدة نوجد فى أبسط صورة الأبعاد أ ب ، أ جـ ، ب جـ نجد أن أ هـ = أ ب + ب هـ أى أن أحد الأبعاد يساوى مجموع البعدين الأخرين

(٢) إذا كان أ ب جـ مثلث فيه :
☹ أ ب = أ جـ فإن المثلث متساوى الساقين
☹ أ ب = أ جـ = ب جـ فإن المثلث متساوى الأضلاع
☹ أ ب ≠ أ جـ ≠ ب جـ فإن المثلث مختلف الأضلاع

إذا كان :
☹ $(أ جـ)^{2} > (أ ب)^{2} + (ب جـ)^{2}$
فإن المثلث منفرج الزاوية فى ب
☹ $(أ جـ)^{2} = (أ ب)^{2} + (ب جـ)^{2}$
فإن المثلث قائم الزاوية فى ب
☹ $(أ جـ)^{2} < (أ ب)^{2} + (ب جـ)^{2}$
فإن المثلث حاد الزوايا

(٣) إذا كانت أ م = ب م = جـ م فإن النقاط أ ، ب ، جـ تقع على دائرة مركزها م وطول نصف قطرها = نق = أ م = ب م = جـ م
☹ مساحة الدائرة = π نق^{2}
☹ محيط الدائرة = ٢π نق

مثال ٣

إثبت أن النقط أ = (١ ، ٢) ، ب = (٢ ، ٤) ، هـ = (٤ ، ٨) تقع على أستقامة واحدة

الحل

البعد = $\sqrt{(ص_{٢} - ص_{١})^{2} + (س_{٢} - س_{١})^{2}}$

ب هـ = $\sqrt{(٨ - ٤)^{2} + (٤ - ٢)^{2}} = \sqrt{٤^{2} + ٢^{2}}$

$= \sqrt{١٦ + ٤} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$

أ ب = $\sqrt{(٤ - ٢)^{2} + (٢ - ١)^{2}} = \sqrt{٢^{2} + ١^{2}}$

$= \sqrt{٤ + ١} = \sqrt{٥}$

أ هـ = $\sqrt{(٨ - ٢)^{2} + (٤ - ١)^{2}} = \sqrt{٦^{2} + ٣^{2}}$

$= \sqrt{٣٦ + ٩} = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$

أ هـ = أ ب + ب هـ
∴ أ ، ب ، هـ على استقامة واحدة

مثال ٤

بين نوع المثلث أ ب هـ الذى فيه أ = (٣ ، ٥) ، ب = (٥ ، ١) ، هـ = (١ ، ١) من حيث الأضلاع

الحل

البعد = $\sqrt{(ص_{٢} - ص_{١})^{2} + (س_{٢} - س_{١})^{2}}$

أ ب = $\sqrt{(١ - ٥)^{2} + (٥ - ٣)^{2}} =$

$= \sqrt{(-٤)^{2} + (٢)^{2}} = \sqrt{١٦ + ٤} = \sqrt{٢٠}$

ب هـ = $\sqrt{(١ - ١)^{2} + (١ - ٥)^{2}} =$

$= \sqrt{٠^{2} + (-٤)^{2}} = \sqrt{٠ + ١٦} = \sqrt{١٦}$

أ هـ = $\sqrt{(١ - ٥)^{2} + (١ - ٣)^{2}} =$

$= \sqrt{(-٢)^{2} + (-٤)^{2}} = \sqrt{٤ + ١٦} = \sqrt{٢٠}$

∴ أ ب = أ هـ ≠ ب هـ

∴ المثلث متساوي الساقين

مثال ٥

أثبت أن المثلث أ ب جـ الذى فيه أ = (٤ ، ٥) ، ب = (٣ ، ٢)، جـ = (-٣ ، ٤) قائم الزاوية و اوجد مساحته

الحل

$أب = \sqrt{(٣ - ٤)^٢ + (٢ - ٥)^٢} = \sqrt{(-١)^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{١ + ٩} = \sqrt{١٠}$

$ب جـ = \sqrt{(-٣ - ٣)^٢ + (٤ - ٢)^٢} = \sqrt{(-٦)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{٣٦ + ٤} = \sqrt{٤٠}$

$أ جـ = \sqrt{(-٣ - ٤)^٢ + (٤ - ٥)^٢} = \sqrt{(-٧)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{٤٩ + ١} = \sqrt{٥٠}$

$(أ جـ)^٢ = (\sqrt{٥٠})^٢ = ٥٠$

$(أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ = (\sqrt{١٠})^٢ + (\sqrt{٤٠})^٢$

$= ١٠ + ٤٠ = ٥٠$

$\therefore (أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢$

∴ الـ Δ قائم فى ب

مساحة المثلث القائم = نصف حاصل ضرب ضلعي الزاوية القائمة

مساحة الـ $\Delta = \frac{١}{٢} \times أ ب \times ب جـ$

$= \frac{١}{٢} \times \sqrt{١٠} \times \sqrt{٤٠} = ١٠$ وحدات مربعة

تدريب ٢

(١) أوجد البعد بين النقطة (٧ ، ٢٤) ونقطة الاصل

....

(٢) اوجد البعد بين النقطتين أ(-٢ ، ٤) ، ب (٣ ، -٤)

....

....

(٣) إذا كان ل (١٥ ، ٠) ، م (٦ ، ٠) اوجد طول القطعة المستقيمة $\overline{ل م}$

....

....

(٤) إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٠)، (٠ ، ١) هو وحدة طول واحدة : فإن أ = ...

....

(٥) اوجد محيط ومساحة الدائرة التى مركزها (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة (٣ ، ١)

....

....

....

....

....

مثال ٦

أثبت أن النقطة م (-٤ ، ٦) هى مركز الدائرة التى تمر بالنقط أ(-٦ ، ٢) ، ب(٠ ، ٨) ، جـ (-٨ ، ٤) وأوجد محيط و مساحة الدائرة

الحل

$م أ = \sqrt{(٢ - ٦)^٢ + (-٦ - (-٤))^٢} =$

$= \sqrt{(-٤)^٢ + (-٤ + ٦)^٢} = \sqrt{١٦ + ٤} = \sqrt{٢٠}$

$م ب = \sqrt{(٨ - ٦)^٢ + (٠ - (-٤))^٢} =$

$= \sqrt{(٢)^٢ + (٠ + ٤)^٢} = \sqrt{٤ + ١٦} = \sqrt{٢٠}$

$م جـ = \sqrt{(٤ - ٦)^٢ + (-٨ - (-٤))^٢} =$

$= \sqrt{(-٢)^٢ + (-٨ + ٤)^٢} = \sqrt{٤ + ١٦} = \sqrt{٢٠}$

∵ م أ = م ب = م جـ

∴ م مركز الدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، جـ

نق = م ب = م أ = م جـ = $\sqrt{٢٠}$

المحيط = ٢ π نق = ٢ $\pi \times \sqrt{٢٠}$ = ٢ $\sqrt{٢٠}\ \pi$

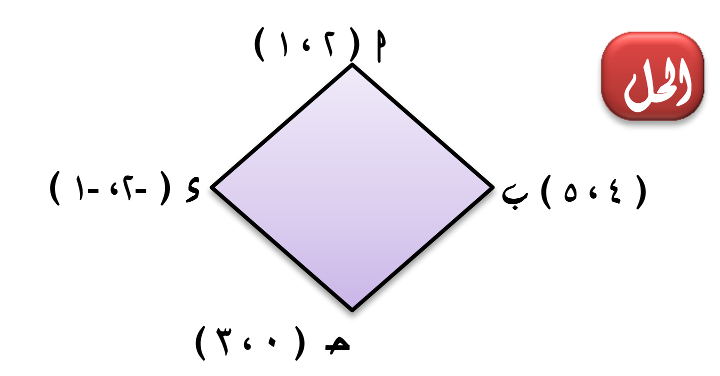
المساحة = π نق^٢ = $\pi (\sqrt{٢٠})^٢$

= ٢٠ π وحدة مربعة

مثال ٧

أثبت أن الشكل الرباعى أ ب حـ ء أنه معين حيث
أ=(٢، ١) ب=(٤، ٥) حـ=(٠، ٣)، ء (-٢، -١)
وأوجد مساحته

الحل



لكي نثبت ان الشكل معين نوجد اطوال اضلاعه

أ ب $= \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} =$
$= \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

ب حـ $= \sqrt{(3-5)^2 + (0-4)^2} =$
$= \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

حـ ء $= \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-0)^2}$
$= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

أ ء $= \sqrt{(-1-1)^2 + (-2-2)^2}$
$= \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

∵ أ ب = ب حـ = حـ ء = أ ء

∴ الشكل معين

ولإيجاد المساحة نوجد طولا قطرية

أ حـ $= \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2}$
$= \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

ب ء $= \sqrt{(-1-5)^2 + (-2-4)^2}$
$= \sqrt{(-6)^2 + (6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$

المساحة = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب قطرية

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{8} \times \sqrt{72} = 12$ وحدات مربعة

تدريب ٣

(١) بين نوع المثلث أ(-٢، ٤) ، ب(٣، -١) حـ(٤، ٥) بالنسبة لأضلاعه

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(٢) أثبت أن الـ Δ الذي رؤوسه أ(٥، -٥) ، ب (-١، ٧) ، حـ(١٥، ١٥) قائم الزاوية واوجد مساحته

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(٣) ﺃ ﺏ ﺣـ ﺀ ﺷﻜﻞ ﺭﺑﺎﻋﻲ ﺣﻴﺚ ﺃ (٥ ، ٣) ، ﺏ (٦ ، -٢) ، ﺣـ (١ ، -١) ، ﺀ (٠ ، ٤) ﺃﺛﺒﺖ ﺃﻥ ﺍﻟﺸﻜﻞ ﺃ ﺏ ﺣـ ﺀ ﻣﻌﻴﻦ ﻭﺃﻭﺟﺪ ﻣﺴﺎﺣﺘﻪ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال ٨

إذا كان بعد النقطة ﺃ (س ، ٥) عن النقطة ب(٦ ، ١) هو ٢ $\sqrt{٥}$ أوجد قيمة س

الحل

ﺃ ب = ٢ $\sqrt{٥}$

$\{\sqrt{(س - ٦)^٢ + (٥ - ١)^٢}\}^٢ = \{٢\sqrt{٥}\}^٢$

$(س - ٦)^٢ + ١٦ = ٤ \times ٥ = ٢٠$

$(س - ٦)^٢ = ٢٠ - ١٦ = ٤$

$(س - ٦)^٢ = ٤$ بأخذ الـ $\sqrt{}$ للطرفين

$\sqrt{(س - ٦)^٢} = \sqrt{٤}$

$س - ٦ = ٢$ ، $س - ٦ = -٢$

$س = ٢ + ٦ = ٨$ ، $س = -٢ + ٦ = ٤$

مثال ٩

إذا كان ﺃ= (١ ، ٢) ، ب = (س ، ٦) وكان طول ﺃ ب = ٥ وحدات أوجد قيمة س

الحل

ﺃ ب = ٥

$\sqrt{(س - ١)^٢ + (٦ - ٢)^٢} = ٥$

بتربيع الطرفين

$\{\sqrt{(س - ١)^٢ + (٦ - ٢)^٢}\}^٢ = \{٥\}^٢$

$\Leftarrow (س - ١)^٢ + ١٦ = ٢٥$

$(س - ١)^٢ = ٢٥ - ١٦ = ٩$ بأخذ $\sqrt{}$ الطرفين

$\sqrt{(س - ١)^٢} = \sqrt{٩}$

$س - ١ = ٣$ ، $س - ١ = -٣$

$س = ٣ + ١ = ٤$ ، $س = -٣ + ١ = -٢$

مثال ١٠

إذا كان ﺃ =(١ ، ٢) ، ب = (س ، س) وكان
طول ﺃ ب = ٥ وحدات أوجد قيمة س

الحل

ﺃ ب = ٥

$\sqrt{(س-٢)^2 + (س-١)^2} = ٥$ وبتربيع الطرفين

$\{\sqrt{(س-٢)^2 + (س-١)^2}\}^2 = \{٥\}^2$

$(س-٢)^2 + (س-١)^2 = ٢٥$

$س^2 - ٤س + ٤ + س^2 - ٢س + ١ = ٢٥$

$٢س^2 - ٦س + ٥ - ٢٥ = ٠$

$٢س^2 - ٦س - ٢٠ = ٠$ بالقسمة على ٢

$س^2 - ٣س - ١٠ = ٠$

$(س-٥)(س+٢) = ٠$

س = ٥ ، س = -٢

تدريب ٤

(١) إذا كان ﺃ =(- ١ ، ٢) ، ب =(س ، ٦) وكان
طول ﺃ ب = $\sqrt{٤١}$ وحدات أوجد قيمة س

....

(٢) إثبت أن النقط ﺃ (-١ ، ١) ، ب (٠ ، ٤) ، ﺣ(٣ ، ١) تقع على محيط دائرة واحدة مركزها م (١ ، ٢) وأوجد طول نصف قطرها ومحيطها ومساحتها

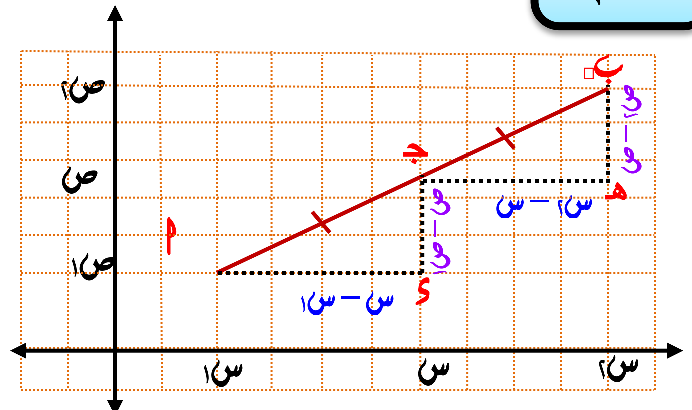
....

(٣) إذا كانت النقطة ﺃ= (س ، ١) على بعدين متساويين من النقطتين ب =(٤ ، ٢)، ﺣ = (٣ ، ٣) أحسب قيمة س

....

إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة

المفهوم



فى الشكل المقابل :

Δ ب هـ جـ ≡ Δ جـ ء أ ومن التطابق

ب هـ = جـ ء ، هـ جـ = ء أ

∴ ص$_{2}$ - ص = ص − ص$_{1}$

⟸ ص$_{2}$ + ص$_{1}$ = ص + ص

٢ص = ص$_{1}$ + ص$_{2}$ ⟸ ص = $\frac{\text{ص}_1+\text{ص}_2}{2}$

س$_{2}$ − س = س − س$_{1}$

⟸ س$_{2}$ + س$_{1}$ = س + س

٢ س = س$_{1}$ + س$_{2}$ ⟸ س = $\frac{\text{س}_1+\text{س}_2}{2}$

القاعدة :

إذا كانت أ =(س$_{1}$ ، ص$_{1}$) ، ب =(س$_{2}$ ، ص$_{2}$)

، هـ = (س ، ص) وكان أ ، ب ، هـ على استقامة واحدة و هـ منتصف أ ب فإن :

هـ = $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{2}$ أو أ + ب = ٢هـ

(س ، ص) =($\frac{\text{س}_1+\text{س}_2}{2}$ ، $\frac{\text{ص}_1+\text{ص}_2}{2}$) أو

(س$_{1}$ + س$_{2}$ ، ص$_{1}$ + ص$_{2}$) = ٢ (س ، ص)

ملاحظات مهمة

(١) لإثبات أن الشكل الرباعى أ ب جـ ء :

متوازى أضلاع

نثبت أن القطران ينصف كلا منهما الأخر وذلك بأن منتصف أ جـ = منتصف ب ء أى أن $\frac{\text{أ}+\text{جـ}}{2}=\frac{\text{ب}+\text{ء}}{2}$

ومنه نجد أن أ + جـ = ب + ء

مستطيل :

نثبت أنه متوازى أضلاع بالطريقة السابقة ثم نثبت أن القطران متساويان

معين:

نثبت أن أضلاعه متساوية

مربع

نثبت أن أضلاعه متساويه وأن القطران متساويان

(٢) إذا كانت نقطة الاصل منتصف أ ب وكانت أ = (ل ، م) فإن ب = (-ل ، - م)

(٣) منتصف القطعة المستقيمة أ (ل ، م) ب (٠ ، ٠) هي النقطة ($\frac{\text{ل}}{2}$ ، $\frac{\text{م}}{2}$)

مثال ١

إذا كانت أ = (١ ، ٣) ، ب = (٣ ، ٦) أوجد منتصف أ ب

الحل

أ(١ ، ٢) ، هـ (س ، ص) ، ب(٣ ، ٦)

نفرض أن هـ هي منتصف أ ب

∵ هـ منتصف أ ب

$$جـ = \frac{أ+ب}{٢} = \left(\frac{س_١+س_٢}{٢} ، \frac{ص_١+ص_٢}{٢} \right)$$

$$هـ = \left(\frac{١+٣}{٢} ، \frac{٢+٦}{٢} \right) = (٢ ، ٤)$$

مثال ٢

إذا كانت ل = (١ ، -٥) ، م = (٣ ، ٣) أوجد نقطة منتصف ل م

الحل

ل(١ ، -٥) ، ن (س ، ص) ، م(٣ ، ٣)

نفرض أن منتصف ل م هو النقطة ن لذا فإن :

$$ن = \frac{ل+م}{٢} = \left(\frac{س_١+س_٢}{٢} ، \frac{ص_١+ص_٢}{٢} \right)$$

$$ن = \left(\frac{١+٣}{٢} ، \frac{-٥+٣}{٢} \right) = (٢ ، -١)$$

تدريب ١

إذا كانت هـ منتصف أ ب وكانت أ = (٣ ، ٧) ، ب = (٥ ، ١) أوجد هـ

....

....

....

....

....

تدريب ٢

إذا كانت هـ منتصف أ ب وكانت أ = (٣ ، -٧) ، ب = (٥ ، -٢) أوجد هـ

....

....

....

....

....

....

مثال ٣

إذا كانت هـ منتصف أ ب بحيث كانت أ = (٣ ، ٤) ، جـ = (-٢ ، ٣) أوجد إحداثيات النقطة ب

الحل

أ(٣ ، ٤) ، جـ(-٢ ، ٣) ، ب(س ، ص)

∵ هـ منتصف أ ب

⟸ أ + ب = ٢ هـ

(٣ + س ، ٤ + ص) = ٢ × (-٢ ، ٣)

(٣ + س ، ٤ + ص) = (-٤ ، ٦)

وعند تساوى زوجين مرتبين فإن :

المسقط الأول = المسقط الأول	و المسقط الثانى = المسقط الثانى
٣ + س = -٤	٤ + ص = ٦
س = -٤ -٣ = -٧	ص = ٦ – ٤ = ٢

إحداثيات النقطة ب = (-٧ ، ٢)

حل أخر :

∵ هـ منتصف أ ب ⟸ أ + ب = ٢ هـ

∴ ب = ٢ هـ − أ

= ٢ (-٢ ، ٣) − (٣ ، ٤)

= (-٤ ، ٦) - (٣ ، ٤) = (-٧ ، ٢)

تدريب ٣

إذا كانت جـ منتصف أ ب وكانت
هـ = (٣ ، -٤) ، ب = (٢ ، -١) أوجد أ

....

....

....

....

....

مثال ٤

إذا كانت أ = (ل ، ٤) ، هـ = (١ ، ٣) ب = (-٣ ، م)
وكانت هـ منتصف أ ب أوجد ل ، م

الحل

أ (ل ، ٤)
هـ (١ ، ٣)
ب (-٣ ، م)

هـ منتصف أ ب

⟸ أ + ب = ٢ هـ

(ل + (-٣) ، ٤ + م) = ٢ × (١ ، ٣)

(ل − ٣ ، م + ٤) = (٢ ، ٦)

ل − ٣ = ٢ | م + ٤ = ٢

ل = ٢ + ٣ = ٥ | م = ٢ − ٤ = -٢

قيمتى ل ، م هى ل = ٥ ، م = -٢

تدريب ٤

إذا كانت هـ منتصف أ ب وكانت
هـ = (ك ، -٤) ، ب = (٢ ، ل)
، أ = (٤ ، ١) أوجد ك ، ل

....

....

....

....

....

مثال ٥

أ ب هـ ى شكل رباعى فيه أ = (٤ ، ٣) ،
ب = (٠ ، ٢) ، هـ = (-٢ ، -٣) ، ى = (٢ ، -٢)
أثبت ان الشكل الرباعى أ ب هـ ى يكون متوازى أضلاع

الحل

أ (٤ ، ٣)
ى (٢ ، -٢)
ب (٠ ، ٢)
هـ (-٢ ، -٣)

منتصف أ جـ = $\frac{أ + هـ}{٢}$ = ($\frac{٤ + (-٢)}{٢}$ ، $\frac{٣ + (-٣)}{٢}$)
= (١ ، ٠)

منتصف ب ى = $\frac{ب + ى}{٢}$ = ($\frac{٠ + ٢}{٢}$ ، $\frac{٢ + (-٢)}{٢}$)
= (١ ، ٠)

∵ منتصف أ هـ = منتصف ب ى

∴ أ هـ ، ب ى ينصف كلا منهما الأخر وهما قطران فى الشكل الرباعى

∴ الشكل متوازى أضلاع

مثال ٦

إذا كانت ٢ = (٥ ، ٢) ب = (٣ ، ٢)
ﺟ = (-٣ ، ١) ثلاث رؤوس متتالية لمتوازى
أضلاع أوجد إحداثيات الرأس الرابع ٤

الحل

٢ (٥ ، -٢) ٤ (س ، ص) م ب (٣ ، ٢) ﺟ (-٣ ، ١)

∵ الشكل ٢ ب ﺟ ٤ متوازى أضلاع

∴ القطران ينصف كلا منهما الأخر

أى أن منتصف ب ٤ = منتصف ٢ ﺟ

$\frac{ب + ٤}{٢} = \frac{٢ + ﺟ}{٢} \Leftarrow ب + ٤ = ٢ + ﺟ$

٤ = ٢ + ﺟ − ب = (٥ ، -٢) + (-٣ ، ١) − (٣ ، ٢)

= (٥ + (-٣) − ٣ ، -٢ + ١ − ٢)

= (٥ − ٣ - ٣ ، - ٣) = (- ١ ، - ٣)

٤ = (- ١ ، - ٣)

تدريب

إذا كانت ٢ =(٣ ، -١) ، ب =(-٥ ، ٢) ،
٤ = (٦ ، ١) ، رؤوس متوازى الاضلاع
٢ ب ﺟ ٤ أوجد أحداثيات الراس ﺟ

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٥

٢ ب ﺟ ٤ شكل رباعي فيه ٢ (٣ ، - ١) ،
ب (٢ ، ٥) ، ﺟ(- ٤ ، ٢) ، ٤(- ٣ ، - ٤)
أثبت أن ٢ ب ﺟ ٤ متوازى اضلاع

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريب

إذا كانت ٢ =(٢ ، ١) ، ب =(٥ ، -١) ،
ﺟ(٦ ، ٥) ، ٤ =(٣ ، ٧) إثبت أن الشكل
٢ ب ﺟ ٤ متوازى أضلاع

....

....

....

....

....

....

....

....

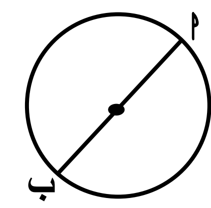
....

....

مثال ٨

أوجد مركز الدائرة التى أ ب قطر فيها
أ = (١ ، ٢) ، ب = (-٥ ، ٤)

الحل



نفرض أن م هو مركز الدائرة التى أ ب قطر فيها

ولكن المركز يقع فى منتصف القطر أى أن :

م منتصف أب م = $\frac{أ+ب}{٢}$ = ($\frac{-٥+١}{٢}$ ، $\frac{٢+٤}{٢}$)

∴ م = (-٢ ، ٣)

أمثلة عامة على البعد والتنصيف

مثال ١

إذا كانت النقط أ(٣ ، ٢) ، ب(٤ ، -٣) ، جـ(-١ ، -٢) ، ء(-٢ ، ٣) أوجد :
☹ إحداثي نقطة تقاطع القطرين ☹ مساحة المعين

الحل

نفرض أن نقطة تقاطع القطرين هي م

∴ م منتصف أ جـ أو منتصف ب ء

∴ م = $\frac{أ+جـ}{٢}$ = ($\frac{٣+(-١)}{٢}$ ، $\frac{٢+(-٢)}{٢}$)

= ($\frac{٣-١}{٢}$ ، $\frac{٢-٢}{٢}$) = ($\frac{٢}{٢}$ ، $\frac{٠}{٢}$) = (١ ، ٠)

مساحة المعين = المساحة = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب قطرية

أ جـ = $\sqrt{(٣-(-١))^٢ + (٢-(-٢))^٢}$

= $\sqrt{(٣+١)^٢ + (٢+٢)^٢}$ = $\sqrt{٤^٢ + ٤^٢}$

= $\sqrt{١٦+١٦}$ = $\sqrt{٣٢}$

ب ء = $\sqrt{(٤-(-٢))^٢ + (-٣-٣)^٢}$

= $\sqrt{(٤+٢)^٢ + (-٦)^٢}$ = $\sqrt{٣٦+٣٦}$ = $\sqrt{٧٢}$

∴ المساحة = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٣٢}$ × $\sqrt{٧٢}$ = ٢٤ وحدة مربعة

مثال ٢

أثبت أن النقاط أ(-٣ ، ٠) ، ب(٣ ، ٤) ، جـ(١ ، -٦) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين رأسه أ ، ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ وعمودية على ب جـ

الحل

أ ب = $\sqrt{(٣-(-٣))^٢ + (٤)^٢}$

= $\sqrt{(٣+٣)^٢ + ١٦}$ = $\sqrt{٣٦+١٦}$ = $\sqrt{٥٢}$

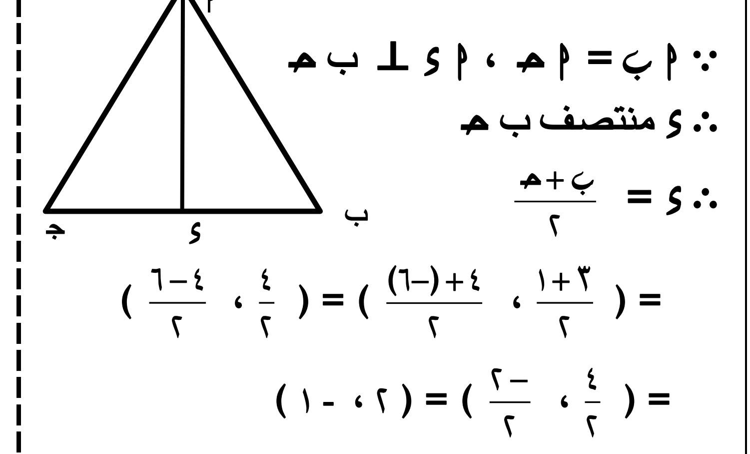
ب جـ = $\sqrt{(١-٣)^٢ + (-٦-٤)^٢}$

= $\sqrt{(-٢)^٢ + (-١٠)^٢}$ = $\sqrt{٤+١٠٠}$ = $\sqrt{١٠٤}$

أ جـ = $\sqrt{(١-(-٣))^٢ + (-٦)^٢}$

= $\sqrt{(١+٣)^٢ + ٣٦}$ = $\sqrt{١٦+٣٦}$ = $\sqrt{٥٢}$

∵ أ ب = أ جـ ∴ الـ Δ متساوي الساقين



∵ أ ب = أ جـ ، أ ء ⊥ ب جـ

∴ ء منتصف ب جـ

∴ ء = $\frac{ب+جـ}{٢}$

= ($\frac{٣+١}{٢}$ ، $\frac{٤+(-٦)}{٢}$) = ($\frac{٤}{٢}$ ، $\frac{٤-٦}{٢}$)

= ($\frac{٤}{٢}$ ، $\frac{-٢}{٢}$) = (٢ ، -١)

مثال ٣

أثبت أن النقاط ٢ (٥ ، ٣) ، ب (٣ ، - ٢) ، هـ (- ٢ ، - ٤) هي رؤوس مثلث منفرج الزاوية فى ب ، ثم أوجد إحداثي نقطة ء التى تجعل الشكل ٢ ب هـ ء معينا وأوجد مساحته

الحل

∵ ٢ ب هـ ء معين ∴ ٢ ب هـ ء متوازى اضلاع

∴ القطران ينصف كلا منهما الاخر

منتصف ب ء = منتصف ٢ هـ

$\frac{ب + ء}{٢} = \frac{٢ + هـ}{٢}$ ⟸ ب + ء = ٢ + هـ

ء = ٢ + هـ − ب

= (٥ ، ٣) + (- ٢ ، - ٤) – (٣ ، - ٢)

= (٠ ، ١)

المساحة = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب قطرية

٢ هـ = $\sqrt{\quad}$ ....

= ....

= ....

ب ء = $\sqrt{\quad}$ ....

= ....

= ....

المساحة = ...

تدريب ١

أثبت أن النقط ٢ (٦ ، ٠) ، ب (٢ ، - ٤) ، هـ (- ٤ ، ٢) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية فى ب وأوجد مساحته ثم أوجد إحداثي النقطة ء التى تجعل الشكل ٢ ب هـ ء مستطيل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٢

إذا كانت ٢ (١ ، - ٦) ، ب (٩ ، ٢) فأوجد إحداثيات النقط التى تقسم $\overline{٢ ب}$ الى اربعة اجزاء متساوية فى الطول واوجد طول اى جزء منها وطول القطعة نفسها

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٣

٢ ب هـ ء متوازي اضلاع فيه ٢ (٣ ، ٤) ، ب (٢ ، - ١) ، هـ (- ٤ ، - ٣) أوجد إحداثي ء وإذا كانت هـ ∋ $\overleftrightarrow{٢ ء}$ حيث ٢ هـ = ٢ ٢ ء . أوجد احداثيات النقطة هـ

....

....

....

....

....

....

....

ميل الخط المستقيم

المفهوم

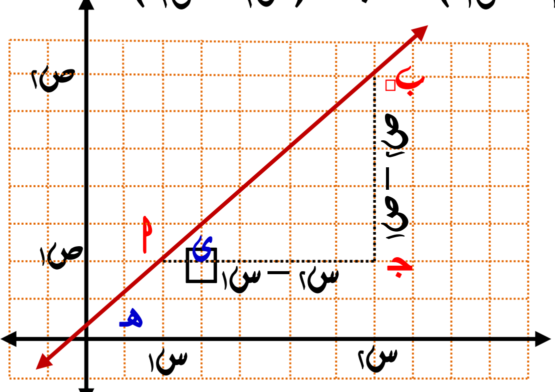
قد علمنا فى السنوات السابقة أن ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين ٲ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) هو

$= \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

المعنى الحقيقى لميل الخط المستقيم

نفرض أن ٲ ، ب نقطتين يمر بهما الخط المستقيم وأن

ٲ = ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب = ($س_٢$ ، $ص_٢$)



من الشكل المقابل:

☹ التغير الأفقى = $ص_٢$ - $ص_١$ = الضلع ب جـ المقابل للزاوية ى

☺ التغير الأفقى = $س_٢$ - $س_١$ = الضلع ٲ جـ المجاور للزاوية ى

☺ الميل = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{\text{المقابل لـ ى}}{\text{المجاور لـ ى}}$

= ظا ى

ولكن الزاوية ى تساوى الزاوية هـ بالتناظر لذا فإن

ميل الخط المستقيم ٲ ب = ظل الزاوية هـ = ظاهـ

المعنى الحقيقى لميل الخط المستقيم

ميل أى خط مستقيم هو ظل الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

ملاحظات مهمة

(١) إذا علم ميل الخط المستقيم فإنه يمكن إيجاد الزاوية التى يصنعها مع المحور س

(٢) إذا علم قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم مع المحور س الموجب فإنه يمكن إيجاد يل المستقيم وذلك بإيجاد ظل الزاوية

مثال ١

أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين

١) ٲ (١ ، ٣) ، ب (٤ ،٧)
٢) ٲ (-١ ، -٣) ، ب (-٥ ، ١)
٣) ٲ (- ١ ، ٣) ، ب (٤ ،٥)
٤) ٲ (٣ ، ٧) ، ب (٥ ،٧)

الحل

(١) ميل ٲب = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧ - ٣}{٤ - ١} = \frac{٤}{٣}$

(٢) ميل ٲب = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ =

$= \frac{١ - (-٣)}{-٥ - (-١)} = \frac{١ + ٣}{-٥ + ١} = \frac{٤}{-٤} = -١$

(٣) ميل ٲب = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٣}{٤ - (-١)}$ =

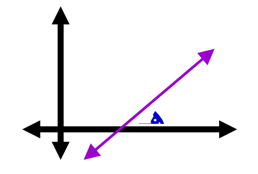
$= \frac{٥ - ٣}{٤ - ٤} = \frac{٢}{٠}$ = قيمة غير معرفة

(٤) ميل ٲ ب= $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧ - ٧}{٥ - ٣} = \frac{٠}{٢}$ = صفر

ملاحظات هامة :

(١) ميل المستقيم المار بالنقط (٠،٠)، (ل، ك) هو = $\frac{ك}{ل}$

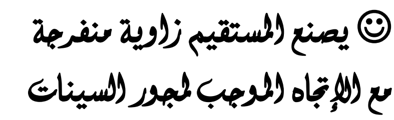
﴿٢﴾ إذا كان ميل الخط المستقيم < صفر ﴿ موجب ﴾



☺ يصنع المستقيم زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

☺ إذا كان ميله م فإن قياس الزاوية التى يصنعها مع الإتجاه الموجب لمحور السينات تكون ظا$^{-1}$ م

﴿٣﴾ إذا كان ميل الخط المستقيم < صفر ﴿سالب﴾



☺ يصنع المستقيم زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

☺ إذا كان ميله − م فإن قياس الزاوية التى يصنعها مع الإتجاه الموجب لمحور السينات تكون = ١٨٠ ـ ظا$^{-1}$ | ـ م |

حيث م عدد موجب

﴿٤﴾ إذا كان ميل الخط المستقيم = صفر

☺ فإن المستقيم يوازى المحور س ﴿ عمودى على المحور ص ﴾

☺ يصنع زاوية قياسها صفر مع محور السينات الموجب

☹ وتكون النقط المار بها متساوية فى المساقط الصادية

مثل (٥ ، ٤) ، (٢ ، ٤) ، (٦ ، ٤) ، (١ ، ٤)

﴿٥﴾ إذا كان ميل الخط المستقيم = $\frac{١}{٠}$

☹ فإن المستقيم يوازى المحور ص ﴿ عمودى على المحور س ﴾

☺ يصنع زاوية قياسها ٩٠ مع محور السينات الموجب

☺ وتكون النقط المار بها متساوية فى المساقط الصادية مثل

(٣ ، ٥) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٧)

مثال ٢

أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها

(١) ٤٥ (٢) ١٣٥ (٣) ٣٠

(٤) ٦٠ (٥) ٩٠ (٦) صفر

(٧) ١٦َ ٢٥ ° (٨) ١٥َ ٣٠ °

الحل

(١) ميل الخط المستقيم = ظل الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

الميل = ظا٤٥ = ١

(٢) الميل = ظا ١٣٥ = ـ ١

(٣) الميل = ظا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٤) .... (٥) ....

(٦) .... (٧) ....

(٨) ....

مثال ٢

أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم الذى ميله

(١) م = ١ (٢) م = ـ ١ (٣) م= ٠.٣٧٢

(٤) م = صفر (٥) م = $\sqrt{٣}$ (٦) م = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$

الحل

(١) الزاوية هـ = ظا$^{-1}$ ١ = ٤٥

زاوية حادة لأن الميل موجب

(٢) هـ = ١٨٠ − ظا$^{-1}$ |ـ١ | = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥

المستقيم ميله سالب لذا تكون الزاوية منفرجة

(٣) هـ = ظا-١ ٠.٣٧٢ = ...

(٤) هـ = ...

(٥) هـ = ...

(٦) هـ = ...

العلاقة بين ميلى مستقيمين متوازيين

المفهوم :

إذا توازى مستقيمان فإن ميليهما يكونا متساويان

أى أن :

(١) إذا كان المستقيمان متوازيان فإن الميلين متساويين إذا كان $ل_١ // ل_٢ \Leftarrow م_١ = م_٢$

(٢) إذا كان الميلين متساويين فإن المستقيمين متوازيين إذا كان $م_١ = م_٢ \Leftarrow ل_١ // ل_٢$

$\forall$ $ل_١ // ل_٢ \Leftrightarrow م_١ = م_٢$ ، $\forall$ $م_١ ، م_٢ \in ح$

التفسير

(١) بفرض أن $ل_١$ يصنع زاوية قياسها $هـ_١$ مع محور السينات الموجب

(٢) وأن $ل_٢$ يصنع زاوية قياسها $هـ_٢$

ميل $ل_١ =$ ظا $هـ_١$ ، ميل $ل_٢ =$ ظا $هـ_٢$

ولكن $ق(\angle هـ_١) = ق(\angle هـ_٢)$ بالتناظر

$\Leftarrow$ ظا $هـ_١$ = ظا $هـ_٢$

مثال ١

أثبت أن المستقيم المار بالنقط ؟(٢ ، ٣) ، ب (٠ ، ٠) يوازى المستقيم المار بالنقط ل (-١ ، ٤) ، م (١ ، ٧)

الحل

(١) ميل المستقيم $\overleftrightarrow{؟ب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٠}{٢ - ٠} = \frac{٣}{٢}$

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{ل م} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧ - ٤}{١ + ١} = \frac{٣}{٢}$

$م_١ = م_٢ \Leftarrow ل_١ // ل_٢$

مثال ٢

أ ثبت ان المستقيم المار بالنقط ؟ (١ ، ٣$\sqrt{٣}$)، ب(٣ ، ٥$\sqrt{٣}$) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ٦٠

الحل

ميل المستقيم ؟ ب $= \frac{٥\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٣}}{٣ - ١} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣}$

ميل المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٦٠

= ظا٦٠ = $\sqrt{٣}$

$\therefore م_١ = م_٢ \Leftarrow ل_١ // ل_٢$

مثال ٣

إذا كان ؟ ب // المحور ص حيث ؟ (س ، ٣) ، ب (٥ ، ٧) أوجد قيمة س

الحل

حيث أن المستقيم يوازى المحور ص فإن المساقط السينية لنقاطه تكون متساوية أى أن س = ٥

حل أخر

المستقيم يوازى المحور ص

$\therefore$ ميله غير معرف = $\frac{١}{٠}$

$\therefore \frac{٧ - ٣}{س - ٥} = \frac{١}{٠} \Leftarrow$ س - ٥ = صفر $\Leftarrow$ س = ٥

تدريب ١

إذا كان المستقيم ؟ب يوازى محور السينات وكانت ؟(٣ ، - ٤) ، ب = (٥ ، ص) أوجد قيمة ص

....

....

ملاحظات مهمة :

(١) لإثبات أن الشكل الرباعى ٲ ب ﺣ ﺀ متوازى أضلاع نثبت أن كل ضلعين متقابلين متوازيين بإستخدام الميل

(٢) لإثبات أن الشكل الرباعى ٲ ب ﺣ ﺀ شبه منحرف نثبت أنه يوجد ضلعين فيه متوازيين وضلعين غير متوازيين بإستخدام الميل أو نثبت أن به ضلعين متوازيين وغير متساويين

(٣) إذا كانت ٲ ، ب ، ﺣ على إستقامة واحدة فإن ميل ٲ ب = ميل ٲ ﺣ = ميل ب ﺣ

مثال ٤

إذا كانت ٲ =(٢ ، ٣) ب =(٦ ، ٢)
جـ =(-٢ ، -٢) ﺀ =(-٢ ، ١)
أثبت أن ٲ ب جـ ﺀ شبه منحرف

الحل

ميل ٲب $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ - ٣}{٦ - ٢} = \frac{-١}{٤}$

ميل ب ﺣ $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٢ - ٢}{-٢ - ٦} = \frac{-٤}{-٨} = \frac{١}{٢}$

ميل ﺣ ﺀ $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - (-٢)}{-٢ - (-٢)} = \frac{١ + ٢}{-٢ + ٢} = \frac{٣}{٠}$

ميل ٲ ﺀ $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٣}{-٢ - ٢} = \frac{-٢}{-٤} = \frac{١}{٢}$

مما سبق نجد أن :

ميل ب ﺣ = ميل ٲﺀ ⟸ ∴ ب ﺣ // ٲ ﺀ

ميل ٲ ب ≠ ميل ﺣ ﺀ ⟸ ∴ ٲ ب لا يوازى ﺣ ﺀ

الشكل الرباعى فيه ضلعين متوازيين وضلعين غير متوازيين

∴ الشكل الرباعى ٲ ب ﺣ ﺀ يكون شبه منحرف

تدريب ٢

أثبت أن الشكل الرباعى الذى رؤوسه ل م ن ﻫ هو شبه منحرف حيث أن ل = (٢ ، ٤)
م =(٤ ، ١) ن = (١ ، -٣) ﻫ = (٣ ، -٦)

....
....
....
....
....
....
....

مثال ٥

أ ثبت أن النقاط ٲ ، ب ، ﺣ على إستقامة واحدة
حيث ٲ = (١ ، -١) ب = (٣ ، ٣)
ﺣ = (٠ ، -٣)

الحل

ميل ٲ ب $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - (-١)}{٣ - ١} = \frac{٣ + ١}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$

ميل ب ﺣ $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٣ - ٣}{٠ - ٣} = \frac{-٦}{-٣} = ٢$

∵ ميل ٲ ب = ميل ب ﺣ ∴ ٲ ب // ب ﺣ

ولكن ب نقطة مشتركة

∴ ٲ ، ب ، ﺣ تقع على مستقيم واحد

تدريب ٣

إذا كانت النقاط ٲ ، ب ، جـ على إستقامة واحدة
حيث ٲ =(٠ ، -١) ب =(س ، ٥)
جـ =(-١ ، -٤) أوجد قيمة س

....
....
....
....
....
....

العلاقة بين ميلى مستقيمين متعامدين

المفهوم :

إذا تعامد مستقيمين فإن حاصل ضرب ميليهما = -١

أى أن:

(١) إذا كان ل١ ⊥ ل٢ ⟸ $\left\{ \text{م}_1 = \frac{-1}{\text{م}_2} ،\ \text{م}_1 \times \text{م}_2 = -1 ،\ \text{م}_2 = \frac{-1}{\text{م}_1} \right.$

(٢) إذا كان م١ × م٢ = -١ ⟸ ل١ ⊥ ل٢

∀ ل١ ⊥ ل٢ ⟺ م١ × م٢ = -١

☺ أى أنه إذا كان المستقيمان متعامدان فإن حاصل ضرب ميليهما = -١

☺ وإذا كان حاصل ضرب ميلى مستقيمين = -١ فإن هذان المستقيمان يكونا متعامدان

السبب

(١) بفرض أن ل١ يصنع زاوية قياسها هـ مع محور السينات الموجب

(٢) وأن ل٢ يصنع زاوية قياسها ى

ميل ل١ = ظاهـ   ميل ل٢ = ظاى

ولكن ى = هـ + ٩٠

ى زاوية خارجة ن المثلث تساوى الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها

⟸ ظاى = ظا(٩٠ + هـ) = $\frac{-1}{\text{ظا هـ}}$

م١ × م٢ = ظا هـ × ظاى = ظا هـ × $\frac{-1}{\text{ظا هـ}}$ = -١

تدريب توضيحى

إذا كان ل١ ⊥ ل٢ أكمل ما يأتى :

(١) م١ = ٣ ⟸ م٢ = ...

(٢) م١ = $\frac{3}{4}$ ⟸ م٢ = ...

(٣) م١ = -١ ⟸ م٢ = ...

(٤) م١ = $\frac{-2}{5}$ ⟸ م٢ = ...

مثال ١

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ (٣ ، ٤) ، ب (٥ ، ١١) يكون عموديا على المستقيم المار بالنقط جـ(٣ ، ٩) ، ء (١٠ ، ٧)

الحل

ميل أ ب = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{11-4}{5-3} = \frac{7}{2}$

ميل جـ ء = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{7-9}{10-3} = \frac{-2}{7}$

ميل أ ب × ميل جـ ء = $\frac{7}{2} \times \frac{-2}{7}$ = -١

∴ أ ب ⊥ جـ ء

مثال ٢

أثبت ان المستقيم المار بالنقط ل (٥ ، ٤) ، م (٣ ، ٦) عمودى على المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥ مع محور السينات الموجب

الحل

ميل ل م = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{6-4}{3-5} = \frac{2}{-2} = -1$

ميل المستقيم الذى يصنع زاوية ٤٥ مع محور السينات الموجب = ظا ٤٥ = ١

ميل أ ب × ميل ل = -١ × ١ = -١

∴ المستقيمان متعامدان

ملاحظات مهمة

(١) الشكل الرباعى ا ب جـ د يكون معين إذا كانت أضلاعة متساوية أو إذا كان متوازي اضلاع قطراه متعامدان

(٢) لإثبات أن المثلث قائم بإستخدام الميل فإنه نثبت أن ضلعى القائمة متعامدان

(٣) لإثبات أن الشكا الرباعى مستطيل نثبت أنه متوازى أضلاع ثم نثبت ان إحدى زواياه قائمة

مثال ٣

أثبت أن المثلث ا ب جـ قائم الزاوية فى ب حيث ا (-١ ، -١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ = (٦ ، ٠)

الحل

إذا كان المثلث قائم فى ب فإن ا ب ⊥ ب جـ

ميل ا ب = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣-(-١)}{٢-(-١)} = \frac{٣+١}{٢+١} = \frac{٤}{٣}$

ميل جـ ب = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣-٠}{٢-٦} = \frac{٣}{-٤} = \frac{٣}{-٤}$

ميل ا ب × ميل ب جـ = $\frac{٤}{٣} \times \frac{٣}{-٤} = -١$

∴ ا ب ⊥ جـ ب ∴ Δ ا ب جـ قائم الزاوية فى ب

مثال ٤

أثبت أن الشكل الرباعى ا ب جـ د مستطيل إذا كان ا = (١ ، ١) ، ب = (٤ ، -٢) جـ = (٦ ، ٠) د = (٣ ، ٣)

الحل

نثبت انه متوازى أضلاع عن طريق الميل :

ميل ا ب = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٢-١}{٤-١} = \frac{-٣}{٣} = -١$

ميل ب جـ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٠-(-٢)}{٦-٤} = \frac{+٢}{٢} = ١$

ميل جـ د = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣-٠}{٣-٦} = \frac{٣}{-٣} = -١$

ميل ا د = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣-١}{٣-١} = \frac{٢}{٢} = ١$

∵ ميل ا ب = ميل جـ د ∴ ا ب // جـ د ــــ (١)

∵ ميل ب جـ = ميل ا د ∴ ب جـ // ا د ــــ (٢)

∴ كل ضلعين متقابلين متوازيين

∴ الشكل متوازى أضلاع

ميل ا ب × ميل ب جـ = -١ × ١ = -١

∴ ا ب ⊥ ب جـ

∴ ق (∠ب) = ٩٠ الشكل إحدى زواياه قائمة

∴ الشكل ا ب جـ د مستطيل

مثال ٥

إذا كان المستقيم المار بالنقط (ا ، ٠) ، (٠ ، ٣) عموديا على المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٣٠ أوجد قيمة ا

الحل

ميل $ل_١$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٠-٣}{ا-٠} = \frac{-٣}{ا}$

ميل $ل_٢$ = ظا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∵ $ل_١ \perp ل_٢$ ∴ $م_٢ = \frac{-١}{م_١}$ ⟸ $\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{ا}{٣}$

ا = $\frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٣} = \sqrt{٣}$

مثال ٦

ا ب جـ Δ قائم الزاوية فى ب وكانت ا=(٣ ، ٥) ب =(٤ ، ٢) جـ =(-٥ ، ص)
أوجد قيمة ص

الحل

Δ ا ب جـ قائم الزاوية فى ب ∴ ا ب ⊥ ب جـ

∴ ميل ا ب = $\frac{-١}{\text{ميل ب جـ}}$

ميل ا ب = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ = $\frac{2-5}{4-3}$ = $\frac{-3}{1}$ = -3

ميل ب جـ = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ = $\frac{ص-2}{-5-4}$ = $\frac{ص-2}{-9}$

∴ ميل ا ب = $\frac{-1}{\text{ميل ب جـ}}$

$\frac{-3}{1}$ = $\frac{9}{ص-2}$ ⟸ -3 (ص – 2) = 9 × 1

-3ص + 6 = 9 ⟸ –3ص = 9 – 6 = 3

ص = $\frac{3}{-3}$ = -1

تدريب 1

إذا كانت النقط (0 ، 1) ، (ا ، 3) ، (2 ، 5) تقع على إستقامة واحدة فأوجد قيمة ا

....

....

....

....

....

....

....

تدريب 2

أثبت أن النقط (-1 ، 3) ، (5 ، 1) ، (6 ، 4) (0 ، 6) هى رؤوس مستطيل

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريب 3

إذا كان المثلث ا ب جـ قائم الزاوية فى ب وكانت ا = (3 ، 5) ب = (4 ، 2) جـ = (7 ، ص) أوجد قيمة ص

....

....

....

....

....

....

تدريب 4

إذا كان المستقيم $ل_1$ يمر بالنقط (3 ، 1) ، (2 ، ك) والمستقيم $ل_2$ يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 45 فأوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$:

متعامدان

....

....

....

....

....

....

....

متوازيان

....

....

....

....

....

معادلة الخط المستقيم

المفهوم

معادلة الخط المستقيم:

هى علاقة بين المحور س والمحور ص التى ترسم مجموعة النقط الغير متناهية التى ترسم الخط المستقيم

وللخط المستقيم العديد من الصور نذكر منها الأتى

صور معادلة الخط المستقيم

(١) الصورة العامة أ س + ب ص + جـ = صفر

☹ ميل المستقيم فى هذة الصورة = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-أ}{ب}$

☹ الجزء المقطوع من المحور ص = $\frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}} = \frac{-هـ}{ب}$

☹ الجزء المقطوع من المحور س = $\frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}} = \frac{-هـ}{أ}$

مثال توضيحي

أوجد ميل الخط المستقيم ٣ س – ٤ ص +٨ = ٠ و اوجد الأجزاء المقطوعة من المحاور بواسطة المستقيم

الحل

الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{-٤} = \frac{٣}{٤}$

الجزء المقطوع من المحور ص = $\frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٨}{-٤} = ٢$

الجزء المقطوع من المحور س = $\frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}} = \frac{-٨}{٣}$

[٢] الصورة الخاصة ص= م س + هـ

☹ ميل الخط المستقيم فى هذة الصورة = معامل س = م

☹ الجزء المقطوع من المحور ص = الحد المطلق = جـ

☹ الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}} = \frac{-جـ}{م}$

مثال توضيحي

أوجد ميل المستقيم ٢ص = ٤س + ٥ وكذلك الجزء المقطوع من المحور س و الجزء المقطوع من المحور ص

الحل

يجب تحويل المستقيم إلى الصورة الخاصة : وذلك بالقسمة على ٢

$$\frac{٢ص}{٢} = \frac{٤س}{٢} + \frac{٥}{٢} \Leftarrow ص = ٢س + \frac{٥}{٢}$$

ميل المستقيم = معامل س = ٢

☹ الجزء المقطوع من المحور ص = الحد المطلق = $\frac{٥}{٢}$

☹ الجزء المقطوع من المحور س = $\frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}}$ =

$$= \frac{(\frac{٥}{٢})}{٢} = \frac{٥\times١}{٢\times٢} = \frac{٥}{٤}$$

(٣) صورة الأجزاء المقطوعة من المحاور

$$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$$

☹ ميل المستقيم فى هذة الصورة = $\frac{-\text{مقام ص}}{\text{مقام س}} = \frac{-ب}{أ}$

☹ الجزء المقطوع من المحور ص= مقام ص = ب

☹ الجزء المقطوع من المحور س = مقام س = أ

مثال توضيحي

أوجد ميل الخط المستقيم س + $\frac{ص}{٢}$ = ١ ثم أوجد الجزء المقطوع من المحور س و الجزء المقطوع من المحور ص

الحل

يجب تحويل المعادلة إلى الصورة الصحيحة وهى :

$$\frac{س}{١} + \frac{ص}{٢} = ١$$

☹ ميل المستقيم = $\frac{- \text{مقام ص}}{\text{مقام س}}$ = $\frac{-٢}{١}$ = −٢

☹ الجزء المقطوع من المحور ص = مقام ص = ٢

☹ الجزء المقطوع من المحور س = مقام س = ١

﴿٤﴾ المستقيم الموازى للمحور س

أ س + ب ص + جـ = صفر ، أ = صفر ص = ك

☹ الميل = صفر

☹ الجزء المقطوع من المحور ص = ك

☹ المستقيم يقطع المحور ص عند النقطة (٠ ، ك)

أو النقطة (٠ ، $\frac{-ب}{أ}$)

مثال توضيحي

أوجد ميل المستقيمات الاتية وكذلك واوجد الأجزاء المقطوعة من المحاور

☹ ٢ ص + ٤ = ٠ ☹ ص = -٢

الحل

☹ الميل = صفر لأن المستقيم يوازى المحور س

والمستقيم يقطع المحور ص عند النقطة (٠ ، -٢)

﴿٥﴾ معادلة محور السينات

معادلة محور السينات هى ص=٠ أ، د(س)=٠

☹ ميل محور السينات = صفر

﴿٦﴾ المستقيم الموازى للمحور ص

أ س + ب ص = صفر أ، س = ك

☹ الميل = غير معرف = $\frac{١}{٠}$

☹ الجزء المقطوع من المحور س = ك

☹ المستقيم يقطع المحور ص عند النقطة (ك ، ٠)

أو النقطة ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠)

مثال توضيحي

أوجد ميل المستقيمات الاتية وكذلك واوجد الأجزاء المقطوعة من المحاور

☹ ٢ س + ٦ = ٠ ☹ ص = -٣

الحل

☹ الميل غير معرف = $\frac{١}{٠}$ لأن المستقيم يوازى المحور ص

والمستقيم يقطع المحور ص عند النقطة (-٣ ، ٠)

﴿٧﴾ معادلة محور الصادات

معادلة محور الصادات هى س = ٠

☹ ميل محور الصادات = غير معرف = $\frac{١}{٠}$

تدريب ١

أوجد ميل كلا من المستقيمات الأتية

(١) ٣ س + ٤ = ٠ (٢) ص = ١

(٣) ٢ص – ٨ = ٠ (٤) س = ٠

الحل

....

....

....

....

﴿٧﴾ معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل

المستقيم المار بنقطة الأصل تكون معادلته خاليه من الحد المطلق :

☹ أ س + ب ص = ٠ ☹ ص = م س

☹ $\frac{ص}{ب} + \frac{س}{أ} = ٠$

ملاحظات مهمة

(١) المستقيم الذى يمر بنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) فإنها تحقق معادلته

(٢) إذا مر المستقيم بنقطة مسقطها السينى = صفر فإن المسقط الصادى يمثل الجزء المقطوع من المحور ص

(٣) إذا مر المستقيم بنقطة مسقطها الصادى = صفر فإن المسقط السينى يمثل الجزء المقطوع من المحور س

(٤) المستقيم المار بنقطة الأصل لا يقطع أى أجزاء من المحاور أى أن الجزء المقطوع من المحور ص = الجزء المقطوع من المحور س = صفر

مثال ١

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقط أ(٢ ، -١) ب (١ ، ١)

الحل

نفرض أن المعادلة فى الصورة ص = م س + جـ

أولا نوجد الميل

الميل = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{١ - (-١)}{١ - ٢} = \frac{١ + ١}{-١} = \frac{٢}{-١} = -٢$

∴ معادلة المستقيم ص = - ٢ س + جـ

ثانيا نوجد الجزء المقطوع جـ

المستقيم يمر بالنقط أ ، ب لذا فإنها تحقق معادلته نختار إحدى النقطتان ولتكن ب (١ ، ١)

∴ س= ١ ، ص = ١

١ = - ٢ × ١ + جـ ⟸ ١ = - ٢ + جـ

⟸ جـ = ١ + ٢ = ٣   جـ = ٣

∴ **معادلة المستقيم** ⟸ ص = - ٢ س + ٣

مثال ٢

أوجد معادلة المستقيم الموازى للمستقيم ٦س - ٣ص +٢ = صفر ويمر بالنقطة (٣ ،٤)

الحل

أولا الميل

نفرض أن المعادلة هى ص = م س + جـ

∵ ل_1 // ل_2 ∴ $\text{م}_1 = \text{م}_2$

$\text{م}_1 = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٦}{-٣} = ٢$ ⟸ $\text{م}_1 = \text{م}_2 = ٢$

∴ معادلة المستقيم هى ص = ٢ س + جـ

ثانيا الجزء المقطوع جـ

والمستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ٤) ∴ تحقق معادلته

س = ٣ ، ص = ٤ ⟸ ٤ = ٢ × ٣ + جـ

٤ = ٦ + جـ ⟸ جـ = ٤ − ٦ = -٢

معادلة المستقيم هى : ص = ٢ س − ٢

مثال ٣

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ،٢) وعموديا على المستقيم المار بالنقط (٢ ، -٣) ، (٥ ، -٤)

الحل



نفرض أن معادلة المستقيم هى ص = م س + جـ

أولا الميل

المستقيم المطلوب ل_1 عمودى على المستقيم ل_2

ميل المستقيم $\text{ل}_2 = \text{م}_2 = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} =$

$\frac{-٤ - (-٣)}{٥ - ٢} = \frac{-٤ + ٣}{٣} = \frac{-١}{٣}$ ⟸ $\text{م}_2 = \frac{-١}{٣}$

∵ $\text{ل}_1 \perp \text{ل}_2$ ⟸ $\text{م}_1 = \frac{-١}{\text{م}_2}$ ⟸ $\text{م}_1 = ٣$

∴ ص = ٣ س + جـ

ثانيا الجزء المقطوع جـ

المستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٢)

⟸ ∴ تحقق معادلته

س = ١ ، ص = ٢ ⟸ ٢ = ٣ × ١ + جـ

٢ = ٣ + جـ ⟸ جـ = ٢ − ٣ = - ١

∴ معادلة المستقيم هى ص = ٣ س − ١

مثال ٤

أوجد معادلة المستقيم العمودى على المستقيم أ ب من النقطة أ حيث أ = (٣ ،٤) ، ب=(٧ ، ١) واثبت أنه يمر بنقطة الأصل

الحل

أولا الميل :

المستقيم $ل_١ \perp ل_٢$ ⟸ $م_١ = \frac{-١}{م_٢}$

$م_٢ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٤}{٧ - ٣} = \frac{-٣}{٤}$

∴ $م_١ = \frac{-١}{م_٢} = \frac{٤}{٣}$

∴ معادلة المستقيم هى $ص = \frac{٤}{٣} س + ﺟ$

ثانيا الجزء المقطوع ﺟ

المستقيم يمر بالنقطة أ (٣ ، ٤)

∴ تحقق معادلته س = ٣ ، ص = ٤

$٤ = \frac{٤}{٣} \times ٣ + ﺟ$ ⟸ ٤ = ٤ + ﺟ

⟸ ﺟ = صفر

معادلة المستقيم هى $ص = \frac{٤}{٣} س$

وهو مستقيم يمر بنقطة الأصل لماذا ؟

تدريب ١

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقط (٣ ، ٥) ، (٢ ، ٧) ,

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٢

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازى المستقيم $ص = \frac{١}{٢} س + ١$

....

....

....

....

....

....

تدريب ٣

أوجد معادلة المستقيم المار بانقطة (١ ، ٤) وعموديا على المستقيم ٢س + ص = ٠

....

....

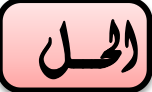
....

....

....

مثال ٥

أوجد معادلة محور تماثل $\overline{أ ب}$ حيث أ(٥، ١) ب = (٧ ، ٥)



محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها

المستقيم ل ⊥ أ ب ويمر بمنتصفها وليكن هـ

ميل ل = $\frac{-١}{ميل\ أب}$

أولا الميل

ميل ﻢ ب = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٥-١}{٧-٥} = \frac{٤}{٢} = ٢$

ميل ل = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة ل هى ⟸ ص = $\frac{-١}{٢}$ س + ﺣ

ثانيا الجزء المقطوع

المستقيم يمر بالنقطة ﻫ (منتصف ﻢ ب)

ﻫ = $\frac{\text{ﻢ}+\text{ب}}{٢} = \left(\frac{٥+٧}{٢} , \frac{١+٥}{٢}\right) = (٦ , ٣)$

النقطة ﻫ تحقق معادلة المستقيم س=٦ ، ص=٣

٣ = $\frac{-١}{٢}$ × ٦ + ﺣ ⟸ ٣ = −٣ + ﺣ

⟸ ﺣ = ٣ + ٣ = ٦ ⟸ ﺣ = ٦

∴ **معادلة المستقيم** هى ص = $\frac{-١}{٢}$ س + ٦

مثال ٦

أوجد معادلة المستقيم الذى يميل على محور السينات الموجب بزاوية قياسها ٦٠° ويمر بالنقطة ($\sqrt{٣}$ ، ٤)

الحل

($\sqrt{٣}$ ، ٤)

٦٠

نفرض أن معادلة المستقيم على الصورة

ص = م س + ﺣ

أولا الميل

الميل = ظل الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

م = ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$

∴ تكون معادلة المستقيم ص= $\sqrt{٣}$ س + ﺣ

ثانيا الجزء المقطوع ﺟ

المستقيم يمر بالنقطة ($\sqrt{٣}$، ٤) ∴ تحقق معادلته

س = $\sqrt{٣}$ ، ص = ٤

∴ ٤ = $\sqrt{٣}$ × $\sqrt{٣}$ + ﺣ ⟸ ٤ = ٣ + ﺣ

ﺣ = ٤ − ٣ = ١ ∴ ﺣ = ١

معادلة المستقيم هى : ص = $\sqrt{٣}$ س + ١

تدريب ٤

أوجد معادلة المستقيم الموازى للمستقيم $\frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{٦} = ١$ و يمر بالنقطة (٢ ، ١)

....

....

....

....

....

....

مثال ٧

أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور الصادات جزءا موجبا قدره ٣ ويوازى المستقيم المار بالنقطتين ﻢ(٢، ٣) ، ب(٥ ، ١)

الحل

أولا الميل

المستقيم ل // المستقيم ﻢ ب ∴ الميل م = ميل ﻢ ب

م = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٣-١}{٢-٥} = \frac{٢}{-٣} = \frac{-٢}{٣}$

∴ م = $\frac{-٢}{٣}$

∴ معادلة المستقيم هى ص= $\frac{-٢}{٣}$ س + ﺣ

ثانيا الجزء المقطوع

ﺟ = ٣

معادلة المستقيم هى ص = $\frac{-٢}{٣}$ س + ٣

مثال ٨

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٠ ، ٥) وميله ٣

الحل

نفرض ان معادله المستقيم هى ص = م س + جـ

الميل

م = ٣ المعادلة هى ص = ٣ س + جـ

الجزء المقطوع جـ

المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٥)

وهى نقطة مسقطها السينى = صفر

∴ المسقط الصادى ٥ هو الجزء المقطوع من المحور ص ∴ جـ = ٥

المعادلة هي ص = ٣ س + ٥

تدريب ٥

أثبت ان المستقيم المار بالنقطة (-١ ، -٣) والعمودى على المستقيم ٢ س + ٦ ص = ٥ يمر بنقطة الأصل

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٦

إذا كان ا ب جـ ء رؤوس معين وكان ا (١ ، ٣) جـ (٧ ، ٩) أوجد معادلة $\overleftrightarrow{بء}$

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٧

أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = ٢ ويمر بالنقطة (٠ ، ٤)

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٨

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٠ ، ٤) ، (٣ ، ٠)

....

....

....

....

....

....